

Câu 1 (2,5 điểm)

a) (Mô hình Gompertz – Mô hình phát triển của khối u) Mô hình phát triển của khối u cho bởi phương trình **Gompertz**

$$\frac{dV}{dt} = bV(\ln a - \ln V),$$

trong đó a, b là các hằng số dương và $V = V(t)$ (đơn vị đo mm^3) là thể tích khối u theo thời gian. Giải phương trình xác định $V(t)$, với điều kiện ban đầu $V(0) = 2\text{mm}^3$.

b) (Bài toán truyền nhiệt) Vận tốc nguội lạnh hoặc nóng lên của một vật trong môi trường tỷ lệ với hiệu giữa nhiệt độ của vật và nhiệt độ môi trường xung quanh. Tức là, nếu gọi $T = T(t)$ là nhiệt độ của vật theo thời gian, T_m là nhiệt độ môi trường, k là hệ số tỷ lệ thì

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \text{ với } k = \text{const} > 0.$$

Giải phương trình vi phân tìm $T(t)$ biết $T_m = e^{-t}$. Xác định nhiệt độ gần đúng của vật sau khoảng thời gian t đủ lớn.

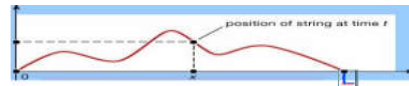
Câu 2 (3 điểm)

a) (Mô hình dao động) Giải phương trình vi phân

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-3t} + \sin 20t \text{ với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0.$$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t . Xác định vị trí cân bằng, biên độ, tần số dao động này.

b) Bài toán truyền sóng một chiều (thuần nhất)



PT: $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < L, t > 0$

BC: $u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, t > 0$

(hai đầu gắn chặt)

IC: $u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), 0 < x < L$ (vị trí ban đầu $f(x)$, vận tốc ban đầu $g(x)$).

Giải bài toán tìm $u(x, t)$ biết $f(x) = \sin 3x$ và $g(x) = a, 0 < x < \pi$, (tức là $L = \pi$).

Câu 3 (2,5 điểm)

a) Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ x + y + m^2 z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$

Xác định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất và khi đó hãy tìm nghiệm của hệ.

b) Tìm trị riêng và vectơ riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Câu 4 (2 điểm)**Sinh viên được chọn 2 trong 4 câu sau đây (mỗi câu 1 điểm)**a) Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x) = x + |\sin x|$ với $-\pi < x < \pi$.b) Anh/Chị hãy viết tất cả các dạng của số phức $z = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}$.c) **Bài toán truyền nhiệt một chiều (thuần nhất) hai đầu cách nhiệt.**

PT: $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$

BC: $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad t > 0$

IC: $u(x, 0) = 100(\pi - x), \quad 0 < x < \pi$.

Giải bài toán tìm $u(x, t)$. $(L = \pi)$.d) **(Hàm sóng trạng thái dừng của hạt-một trường hợp riêng phương trình Schrödinger)**Cho $k = \text{const}$ và $l = \text{const}$, hãy tìm nghiệm các phương trình vi phân

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = k^2 \psi, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -l^2 \psi. \quad (2)$$

❖ **Ghi chú :** Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.**CHUẨN ĐẦU RA**

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Câu 1, 2: Nhận dạng được các bài toán trong thực tế được mô hình bởi phương trình vi phân hoặc phương trình đạo hàm riêng. Giải được các bài toán này và hiểu được ý nghĩa các kết quả tìm được.	G1: 1.1, 1.2, G2:2.1,2.3 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.6
Câu 3: Nắm vững phép toán ma trận, tính được định thức và ứng dụng, biết và thực hiện các cách giải hệ phương trình tuyến tính.	G1: 1.1, 1.2 G2:2.1.3, 2.1.4, 2.4.2,2.6;2.7
Câu 4: Nhận dạng được các bài toán trong thực tế được mô hình bởi phương trình vi phân hoặc phương trình đạo hàm riêng. Giải được các bài toán này và hiểu được ý nghĩa các kết quả tìm được. Khai triển được hàm số thành chuỗi Fourier và hiểu ý nghĩa khai triển. Biết được tất cả các dạng và thực hiện được các phép toán số phức.	G1: 1.1; G2:2,2.1,2.3 G2:2.1, 2.1.2, 2.4.2

Ngày 29 tháng 5 năm 2025
Thông qua Bộ môn Toán